2/a- Montrer que f est dérivable sur D^* et calculer $f'(x)$ pour $x \in D^*$.

b- Etudier les variations de la fonction f' sur D^*. En déduire que $f'(x) > 0$ pour tout x de D^*.

c- Dresser le tableau de variation de la fonction de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan P.

3/ Soit α un nombre réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$.

a- Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la région du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = \alpha$ et $x = 1$.

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathscr{A}(\alpha)$.

B- Soit Δ la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1/ Tracer, dans le plan P, la courbe (C') déduite de la courbe (C) par la symétrie orthogonale S_Δ d'axe Δ.

2/ Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan P.

a- Montrer que $M' = S_\Delta(M)$ si seulement si $\begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = y \end{cases}$

b- Soit $x \in D^*$ et $M(x,y)$ un point du plan P. Vérifier que $-x-1 \in D^*$ et montrer que $M \in (C') \Leftrightarrow y = f(-x-1)$.

c- On désigne par g la fonction admettant (C') comme courbe représentative. Montrer que $\forall x \in D^*; g(x) = (x+1)\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

C-1/ Justifier que pour tout n de IN^*, $f(n) < 1 < g(n)$

2/ Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur IN^* par :

$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

a- Montrer que pour tout n de IN^*, $u_n < e < v_n$.

b- Montrer que pour tout n de IN^*, $v_n - u_n < \frac{e}{n}$.

c- Déduire des questions précédentes la limite de u_n puis celle de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1)a- H et F sont dans $(\mathscr{C}) \Rightarrow AH = AF$
comme de plus H est le projeté orthogonal de A sur la droite D Alors AF=d(A,D)